

Άσκηση: Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Πρώτα βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 4-x & 1 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 5 & 1 & 4-x \end{pmatrix} = 0 + (-1)^{2+2}(-1-x) \begin{vmatrix} 4-x & -3 \\ 5 & 4-x \end{vmatrix} + 0 = \\ &= -(x+1) [(4-x)(-4-x)+15] = -(x+1)(x^2-16+15) = \\ &= -(x+1)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Άρα $\chi_A(x) = -(x+1)^2(x-1)$.

Πυρρίνω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο διαιρείται από το ελάχιστο και τα 2 πολυώνυμα έχουν τις ίδιες ρίζες.

$\max (x+1)^{\alpha}(x-1)^{\beta} \rightarrow$ ώστε να έχουν ίδιες ρίζες, αλλά μπορεί να αλλάξει η ποσότητα:

$$1 \leq \alpha \leq 2 \text{ και } 1 \leq \beta \leq 1.$$

Άρα αναγκαστικά $\beta=1$.

Έχουμε 2 πιθανά πολυώνυμα

Το $(x+1)(x-1)$ και το $(x+1)^2(x-1)$.

$\hookrightarrow$ αν καν βγει 0 επιβεβαιώνεται ότι είναι το ελάχιστο, αλλιώς είναι το άλλο.

Ελεγχος: $(A+I)(A-I)$ βλέποντας ότι δέσνη του x του πίνακα A .

$$(A+I)(A-I) = A^2 - A + A - I^2 = A^2 - I^2.$$

Και φυσικά δεν ισχύει η ταυτότητα γιατί δεν είμαστε σε προετοιμασμένο χώρο, όμως επειδή παλινδρομεί με I έχουμε $-A+A=0$.

$\rightarrow \rightarrow$

Απεί να βρω το A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3 \times 3}$$

Προέκυψε ότι $A^2 = I \Rightarrow A^2 - I = 0 \Rightarrow (A+I)(A-I) = 0 \Rightarrow$

$\rightarrow$ το $(x+1)(x-1)$ με ελάχιστο πολλαπλότητα $(\alpha=1)$

είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A ; αφαι επιβεβαιώνεται

Είναι ο πίνακας διαγωνίσιμος;

$\rightarrow$ Πρώτο κριτήριο $\rightarrow$ διαγωνίσιμος

$\rightarrow$ Κάθε ρίζα πρέπει να είναι απλή

Ισχύουν οι δύο προϋποθέσεις, άρα είναι διαγωνίσιμος.

!! Αν ήξερα από την αρχή ότι είναι διαγωνίσιμος, θα ανέπνι το $(x+1)^2(x-1)$ γιατί δεν πληροί τις προϋποθέσεις.

Άρα θα ήξερα ότι είναι το $(x+1)(x-1)$

!!

Άσκηση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{2016 \times 2016}$ τέτοιος ώστε $A^2 - A = O_{2016 \times 2016}$.
Είναι ο A διαγωνίσιμος;

Γνωρίζω ότι ο A ικανοποιεί το πολυώνυμο $f(x) = x^2 - x \Rightarrow$
(προκύπτει από τη σχέση $A^2 - A = O_{2016 \times 2016}$)

$$\Rightarrow m_A(x) \mid x(x-1) = x^2 - x$$

!!

Αφού ο A ικανοποιεί το πολυώνυμο $x^2 - x$, τότε το ελάχιστο
διαίρει το πολυώνυμο (θεώρημα)

$$\text{Άρα } m_A(x) \in \left\{ \underset{\uparrow}{1}, \underset{\uparrow}{x}, \underset{\uparrow}{x-1}, \underset{\uparrow}{x(x-1)} \right\}$$

Άρα το ελάχιστο είναι το x ή το $x-1$ ή το $x(x-1)$.

1^η περίπτωση: $m_A(x) = x$

2^η περίπτωση: $m_A(x) = (x-1)$

3^η περίπτωση: $m_A(x) = x(x-1)$

Σε όλες τις περιπτώσεις το ελάχιστο
πολυώνυμο του A είναι γινόμενο
πρωτοβαθμίων και κάθε ρίζα είναι απλή.
Άρα πάντα ο A είναι διαγωνίσιμος.

* Σε κάθε περίπτωση, ποιος είναι ο A ;

Ο A ικανοποιεί το ελάχιστο: $m_A(x) = 0 \Rightarrow A = O_{2016 \times 2016}$ (1^η περίπτωση)

2^{την} δεύτερη περίπτωση $m_A(x) = 0 \Rightarrow A - I = 0 \Rightarrow A = I$

2^{την} τρίτη περίπτωση δεν μπορούμε βρω τον πίνακα (είναι άπειροι)

Επομένως, στις 2 πρώτες περιπτώσεις ο πίνακας είναι και
διαγωνίσιμος, και σταγμένος.

Άσκηση: Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

χωρίς πράξεις

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μονικό & πολυώνυμο.

$$m_A(x) = (x-7)(x+11)(x-3)$$

Είναι και διαγωνίσιμος, γιατί το πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων και κάθε ρίζα είναι απλή.

Εάν $A \in \mathbb{R}^{2016 \times 2016}$ τέτοιος ώστε :

$$A^3 - 2016 \cdot A = 0. \text{ Είναι ο A διαγωνίσιμος ;}$$

Ο A ικανοποιεί το πολυώνυμο $(x^3 - 2016 \cdot x)$.

Παρατηρώ ότι το ελάχιστο : $m_A(x) \mid x^3 - 2016 \cdot x = x(x^2 - 2016)$

$$f(x) = x^3 - 2016 \cdot x = x(x^2 - 2016) = x(x - \sqrt{2016})(x + \sqrt{2016}).$$

Δεν ξέρω ποιο είναι το ελάχιστο γιατί έχω πολλές επιλογές

Αρα :

$$m_A(x) \in \left\{ 1, x, x + \sqrt{2016}, x - \sqrt{2016}, x(x + \sqrt{2016}), x(x - \sqrt{2016}), (x + \sqrt{2016})(x - \sqrt{2016}), x(x + \sqrt{2016})(x - \sqrt{2016}) \right\}$$

Όλα αυτά είναι μονικά πολυώνυμα και διαιρέτες του $f(x)$

Σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων, και κάθε ρίζα είναι απλή. Άρα πάντα ο A είναι διαγωνίσιμος.

Γραμμική Άλγεβρα II

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4, Μάρτιος 2016, Ελάχιστο πολυώνυμο - Εσωτερικό γινόμενο

- ~~1.~~ Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = (-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) \in \mathbb{F}[x]$ και τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

*→ σε αυτήν
είναι ο πίνακας
του αντίθετου
των συντελεστών*

Ο A λέγεται **συνοδεύων** πίνακας του πολυωνύμου. Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $f(x)$.

- ~~2.~~ Έστω $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ τέτοιος ώστε $A^2 + I_2 = O_{2 \times 2}$. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πολυώνυμο του A και να δείξετε ότι ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.

- ~~3.~~ Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ τέτοιος ώστε $A^2 = I_3$. Τι γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τί για το χαρακτηριστικό; Είναι ο A διαγώνιος; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

- ~~4.~~ Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και m φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του n . Δείξτε ότι αν $A^m = O_{n \times n}$ τότε $A^n = O_{n \times n}$.

- ~~5.~~ Βρείτε τον πίνακα e^A , όπου A είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

6. Έστω η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2.$$

- Δείξτε ότι η απεικόνιση αυτή ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$.
- Βρείτε τα μήκη των διανυσμάτων $(1, 0)$, $(0, 1)$ ως προς αυτό το γινόμενο.

7. Ας είναι $\mathbb{R}_n[x]$ ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n και $r_0, r_1, \dots, r_n$ πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}_n[x]$.

Φύλλο #4

Άσκηση : 2.

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, A^2 + I = O_{2 \times 2}$$

Ο πίνακας A ικανοποιεί το πολυώνυμο $g(x) = x^2 + 1$.
Άρα $m_A(x) \mid x^2 + 1$.

$$m_A(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$\text{Επομένως } m_A(x) \in \{1, x^2 + 1\} \Rightarrow m_A(x) = x^2 + 1.$$

• Δεν είναι γραμμένο πρωτοβαθμίου, άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνίσιμος.

Αν ήταν $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ τότε θα ήταν διαγωνίσιμος.

$$m_A(x) \in \{1, x+i, x-i, (x+i)(x-i)\}$$

Σε κάθε περίπτωση (εκτός του 1) είναι γραμμένο πρωτοβαθμίου και όποτε οι ρίζες είναι αμφί, άρα θα ήταν διαγωνίσιμος.

$$m_A(x) = x+i$$

$$\chi_A(x) = (x+i)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

στην μέγιστη διαίρεση.

αν είναι

3x3
θα ήταν
σε τιν 3^η.

$$m_A(x) = x-i$$

$$\chi_A(x) = (x-i)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$m_A(x) = x^2 + 1$$

$$\chi_A(x) = x^2 + 1.$$

Ερώτηση: Έχω έναν πίνακα

$$A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

Ποιό είναι το χαρακτηριστικό??

$$m_A(x) = (x-2)(x+4)$$

$$\chi_A(x) = -(x-2)^a(x+4)^b$$

Έχω "-" γιατί είναι $\det A = 0$, πίνακες $1 \times 1, 3 \times 3, 5 \times 5$...

έχω αρνητικό $\chi_A(x)$.

Γέρω ότι $a+b=5$ και $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$

Πιθανές περιπτώσεις:

$$-(x-2)(x+4)^4, -(x-2)^2(x+4)^3, -(x-2)^3(x+4)^2, -(x-2)^4(x+4)$$

*) Σε ποιές περιπτώσεις είναι διαγώνιστος?

ΠΑΝΤΑ μαζί το ελάχιστο ($m_A(x)$) είναι γινόμενο γραμμικών με άντες ρίζες.

νόμος: 3

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, A^2 = I_3$$

Αν είναι διαγώνιος
είναι και διαγωνίστμος.
Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αρχικά, βρίσκω το ελάχιστο πολυώνυμο.

Ο πίνακας ικανοποιεί το πολυώνυμο $x^2 - 1 = h(x)$

και γράφεται ως $m_A(x) \mid h(x)$

Οι μονικοί διαιρέτες του πολυωνύμου είναι:

$$m_A(x) \in \{1, x-1, x+1, (x-1)(x+1)\}$$

(i) $m_A(x) = x-1$

$$\chi_A(x) = -(x-1)^3$$

Δρα ο A είναι

ο μοναδιαίος

αφού έχω

$x-1$ είναι

σαν να έχω

$$A - I = 0 \Rightarrow A = I$$

ή αλλιώς

βλέπω το $(x-1)$.

κατασκευάζω

είναι και διαγώνιος

και διαγωνίστμος.

(ii) $m_A(x) = x+1$

$$\chi_A(x) = -(x+1)^3$$

$$A = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Είναι και διαγώνιος
και διαγωνίστμος

(iii) $m_A(x) = (x-1)(x+1)$

$$\chi_A(x) = -(x-1)^a (x+1)^b$$

Γε $1 \leq a \leq 2$ και
 $1 \leq b \leq 2$.

Δρα έχω

$$\chi_A(x) = -(x-1)^2 (x+1) \text{ ή}$$

$$\chi_A(x) = -(x-1)(x+1)^2$$

Ο πίνακας και
είναι διαγωνίστμος

αφού έχω στο

ελάχιστο πολυώνυμο

πρωτοβάθμιο ή

απλά ρίζες.

Δεν γράφει αν είναι
διαγώνιος.

Άσκηση: 4

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, m φυσικός $\geq n$, $\forall A^m = 0_{n \times n} \Rightarrow A^n = 0_{n \times n}$

Ο πίνακας A ικανοποιεί το πολυώνυμο $f(x) = x^m$ (*)

$$\text{Άρα } mA(x) \mid x^m \Rightarrow mA(x) = x^s$$

$$\deg(mA(x)) = s \leq \deg(xA(x)) = n$$

$$\text{Άρα } \left. \begin{matrix} A^s = 0_{n \times n} \\ s \leq n \end{matrix} \right\} \Rightarrow A^s \cdot A^{m-s} = 0 \cdot A^{m-s} \Rightarrow A^n = 0_{n \times n}$$

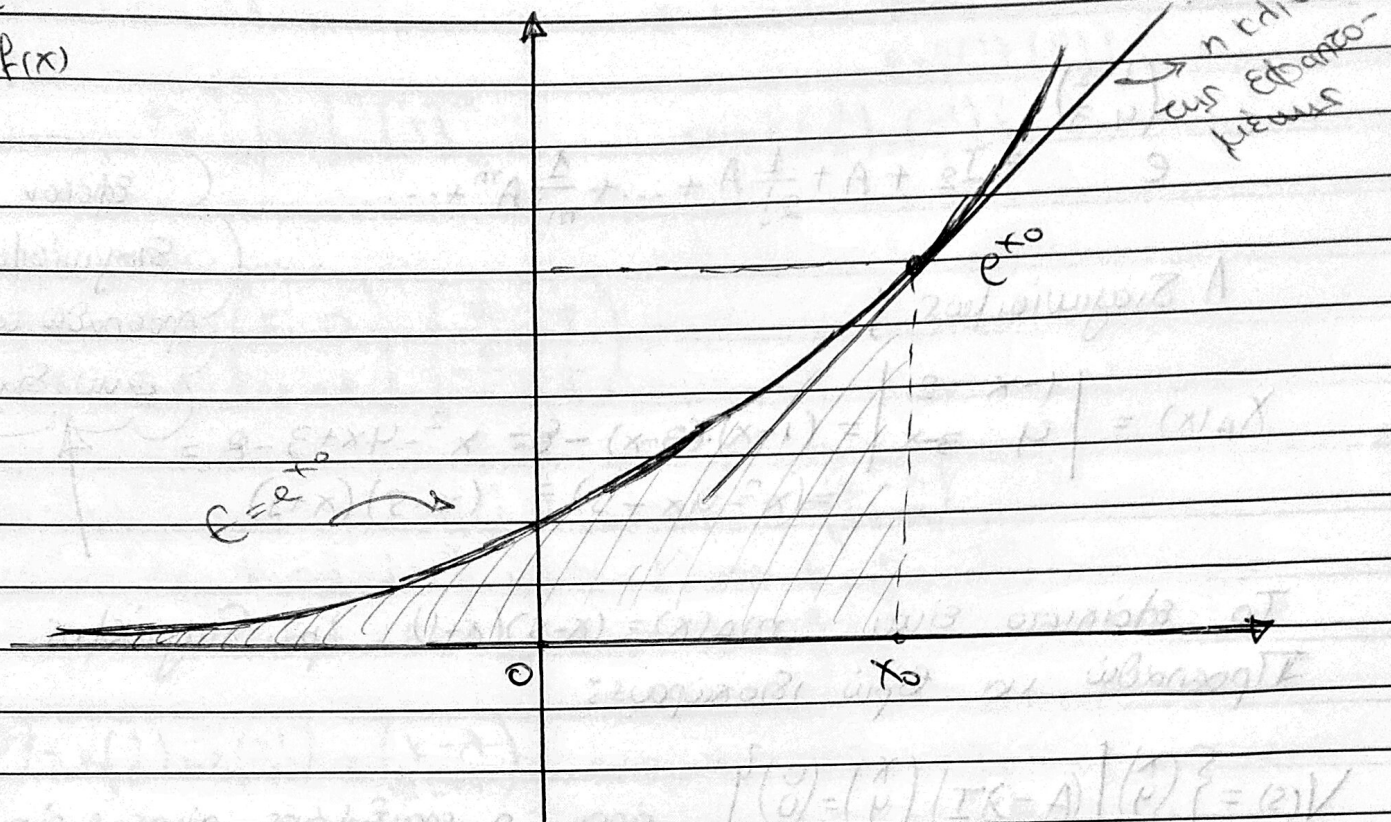
(*) για να βρω το x^m , ένας A^m
είναι $(1-x) - \beta \alpha \beta x$ το x και προκύπτει.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - A$$

$$I = A \Leftrightarrow I - A = 0$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = f(x)$$



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$e^A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definition

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}} = I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^m + \dots =$$

$$= I_n + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix} + \dots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!} \lambda_1^2 + \dots + \frac{1}{m!} \lambda_1^m + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2!} \lambda_2^2 + \dots + \frac{1}{m!} \lambda_2^m + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!} \lambda_n^2 + \dots + \frac{1}{m!} \lambda_n^m + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = I_2 + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots + \frac{1}{m!} A^m + \dots$$

A διαγωνίσιμος;

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) - 8 = x^2 - 4x + 3 - 8 = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

Εφόσον είναι
διαγωνίσιμος,
προσπαθώ να τον
ράσω διαγώνιο

Το ελάχιστο είναι $m_A(x) = (x-5)(x+1)$ άρα διαγωνίσιμος.
Προσπαθώ να βρω ιδιοκύματα:

$$V(s) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (A - sI) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ άρα ο ενεργημέως μηδενός είναι 0:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \rightarrow \frac{r_1}{-4}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ y = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}t \\ y = t \end{array}$$

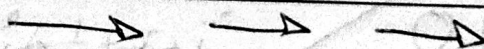
$$\text{Άρα } V(s) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ άρα ο ενεργημέως μηδενός είναι 0:}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 \rightarrow \frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \end{array}$$

$$\text{Άρα } V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$



$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$$

ε κανονική βάση

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[L_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon} = [I]_{\alpha}^{\varepsilon} [L_A]_{\alpha}^{\alpha} [I]_{\varepsilon}^{\alpha}$$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa - \lambda \\ 2\kappa + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \kappa - \lambda = 1 \\ 2\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa + 2\kappa = 1 \\ \lambda = -2\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{1}{3} \\ \lambda = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa - \lambda \\ 2\kappa + \lambda \end{pmatrix}$$

$$\kappa - \lambda = 0 \Rightarrow \kappa = \lambda$$

$$2\kappa + \lambda = 1 \Rightarrow 3\kappa = 1 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{3} = \lambda$$

Τύπος υπολογισμού του e^A :

$$\left(I_2 = P^{-1} I_2 P \right)$$

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = I_2 + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots + \frac{1}{m!} A^m + \dots =$$

$$= I_2 + P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P + \frac{1}{2!} \left(P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P \right)^2 + \dots + \frac{1}{m!} \left(P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P \right)^m + \dots =$$

$$= P^{-1} I_2 P + P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P + \frac{1}{2!} P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 P + \dots + \frac{1}{m!} P^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m P + \dots =$$

$$= P^{-1} \left(I_2 + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 + \dots + \frac{1}{m!} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^m + \dots \right) P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^5 & -e^{-1} \\ 2e^5 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \dots$$

... κτλ ...

Ερώτησις :

Μπορεί οποιοδήποτε πρόσωπο να είναι χαρακτηριστικό κάποιου είδους;

$$X_A(x) \neq (3x^7 - 5x^3 + 2x - 2017) \quad 0x1$$

γὰρ αὐτὴ ἡ ἀπορία οὐ ἀπὸ τοῦ γενεῶντος 1.

Δv n ~~0~~ ^{np17705} 0 — " — — 1

Οα ληγοίβε να ηταν $x_A(x) = -x^7 - 5x^3 + 9x - 2017$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2017 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ο νικητής
έχει
τα δικαιώματα
του νικητή
το χαρτί.

~~12/20/20~~

ΑΣΚΗΣΗ 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \Gamma_{n-1} + x\Gamma_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \Gamma_{n-2} + x\Gamma_{n-1} \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-3} - x a_{n-2} - a_{n-1} x^2 - x^3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} - a_{n-1} x - x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 - a_2 x - a_{n-1} x^{n-2} - x^{n-1} \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Gamma_1 + x\Gamma_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{n-1} x^{n-1} - x^n \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \end{vmatrix} = \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &= 0+0+\dots+0+(-1)^{n+1}(-a_0-a_1x+a_2x^2-\dots-a_{n-1}x^{n-1}-x^n)= \\
 &= (-1)^{n+1}[-(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n)]= \\
 &= (-1)^{n+2}(a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n)= \\
 &= (-1)^n(a_0+a_1x+\dots+x^n).
 \end{aligned}$$

* * * * *

Πρόβλημα #3 άσκηση 2 :

a, b ? $T(x, y, z) = (2x, 2y+az, 3x+bz)$
 να είναι διαγώνιστες.

Μια αντιστροφή είναι διαγώνιστη όταν ο αντίστροφός της είναι διαγώνιστος

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$T(1,0,0) = (2,0,3)$$

$$T(0,1,0) = (0,2,0)$$

$$T(0,0,1) = (0,a,b)$$

όπου $\mathcal{E}$
 η κανονική
 βάση

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & a \\ 3 & 0 & b-x \end{pmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & a \\ 0 & b-x \end{vmatrix} = (2-x)^2(b-x)$$

Παρατηρούμε: 2, b

(i) $b \neq 2$ 2 αλγεβρ. πολλαπλότητα 3

(ii) $b \neq 2$ 2 " " 2 και b αλγ. ποτ. 1

→ → →

(1^η περίπτωση) A διαγωνισμός $\dim V(2) = 3$

(2^η περίπτωση) A διαγωνισμός $\dim V(2) = 2$ $\dim V(b) = 1$.

$$1 \leq \dim V(b) \leq 2.$$

του ομογενούς του πρώτου ποσού